

## Kocka csonkolása

### A feladat

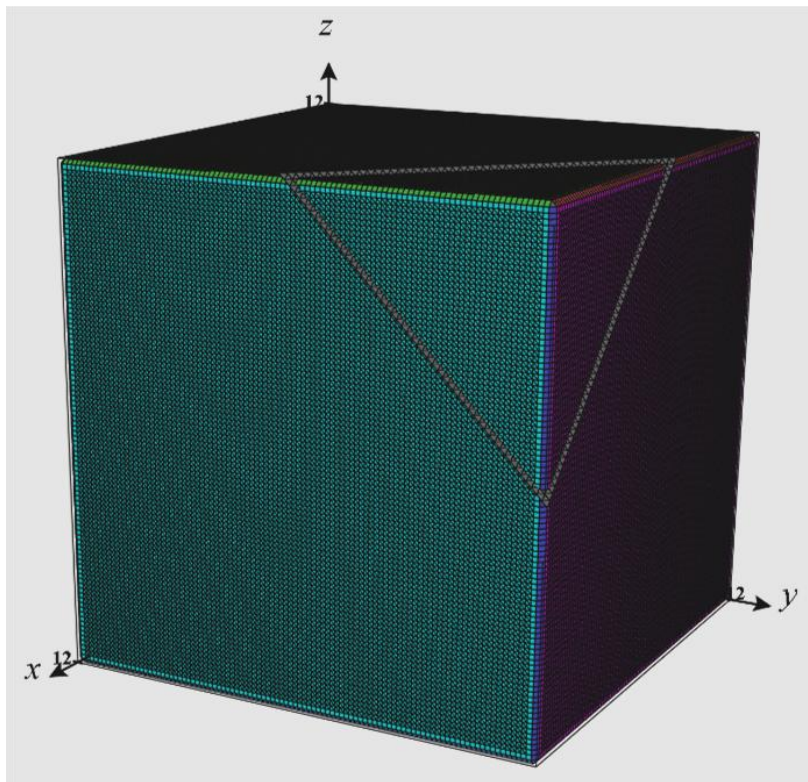
Egy  $a$  élhosszúságú kockából egyik csúcsánál levágunk egy gúlát, úgy, hogy a lemetszett kockaélek hosszai  $\lambda \cdot a$ , ahol  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Határozzuk meg:

- a csonkolósík tengelymetszetes egyenletét,
- a csonkolt kocka felszínét és térfogatát,  
a  $\lambda$  paraméter függvényében;
- alkalmazzuk az eredményeket a  $\lambda = 0$  és  $\lambda = 1$  esetekre!

### A megoldás

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!

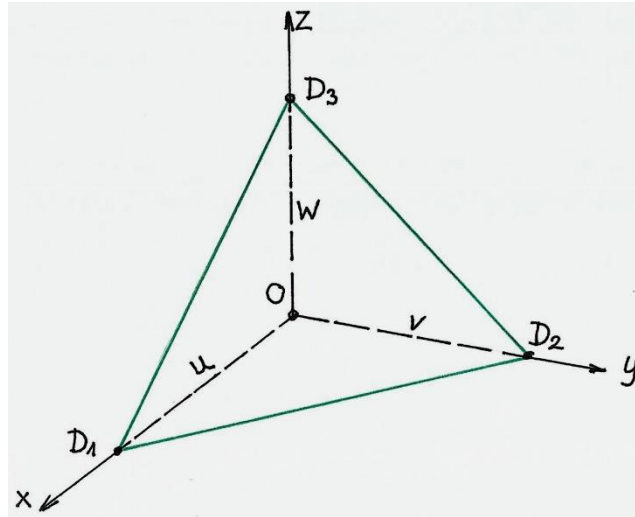


1. ábra – forrása:[ 1 ]

Itt a „lemetszett sarkú kockát” ábrázoltuk. A metszősíkot egy kicsit „kilógattuk” a kockához képest, hogy metszésvonalaik jobban látszódnak. A képen látszik, hogy a kockát közelítő *szupergömb* még nagy kitevő és felosztási számok mellett sem tölti ki teljesen a befoglaló „box” adta kereteket. Ez nem olyan nagy baj, mert itt csak a szemléltetés a cél.

**a) A csonkolósík tengelymetszetes egyenletének felírása**

A folytatáshoz tekintsük a 2. ábrát!



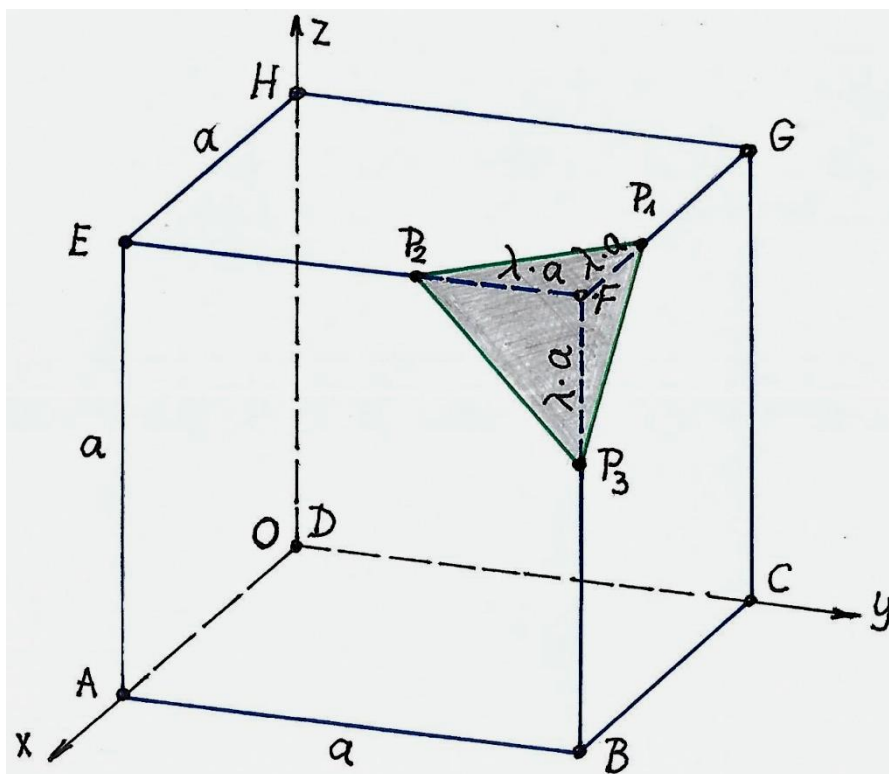
2. ábra

A csonkolósík / metszősík tengelymetszetes egyenlete általában – v. ö. [ 2 ]! – :

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1. \quad (1)$$

A közvetlen feladat az  $(u, v, w)$  paraméterek meghatározása.

Ehhez tekintsük a 3. ábrát is!



3. ábra

Az  $(u, v, w)$  paraméterek száma 3, így ugyanennyi egyenletre van szükségünk meghatározásukhoz. Ezek az egyenletek a 3. ábra alapján az alábbiak.

A  $P_1, P_2, P_3$  pontok rajta vannak a metszősíkon is, így e pontok koordinátái kielégítik a sík (1) egyenletét:

$$\frac{x_1}{u} + \frac{y_1}{v} + \frac{z_1}{w} = 1, \quad (2/1)$$

$$\frac{x_2}{u} + \frac{y_2}{v} + \frac{z_2}{w} = 1, \quad (2/2)$$

$$\frac{x_3}{u} + \frac{y_3}{v} + \frac{z_3}{w} = 1. \quad (2/3)$$

Továbbá a 3. ábra szerint:

$$x_1 = a - \lambda \cdot a = (1 - \lambda) \cdot a, \quad y_1 = a, \quad z_1 = a; \quad (3/1)$$

$$x_2 = a, \quad y_2 = a - \lambda \cdot a = (1 - \lambda) \cdot a, \quad z_2 = a; \quad (3/2)$$

$$x_3 = a, \quad y_3 = a, \quad z_3 = a - \lambda \cdot a = (1 - \lambda) \cdot a. \quad (3/3)$$

Most (2) és (3) szerint felírjuk az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\frac{(1-\lambda) \cdot a}{u} + \frac{a}{v} + \frac{a}{w} = 1, \quad (4/1)$$

$$\frac{a}{u} + \frac{(1-\lambda) \cdot a}{v} + \frac{a}{w} = 1, \quad (4/2)$$

$$\frac{a}{u} + \frac{a}{v} + \frac{(1-\lambda) \cdot a}{w} = 1. \quad (4/3)$$

A (4) egyenletrendszert a *Cramer* - szabállyal megoldva az alábbiakra jutunk:

$$\underline{u = v = w = (3 - \lambda) \cdot a}. \quad (5)$$

Majd (1) és (5) - tel:

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1 \rightarrow \frac{x}{u} + \frac{y}{u} + \frac{z}{u} = 1 \rightarrow \frac{1}{u} \cdot (x + y + z) = 1 \rightarrow x + y + z = u \rightarrow$$

$$\underline{\underline{x + y + z = (3 - \lambda) \cdot a}}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (6)$$

A (6) egyenlet írja le a metszősíkot. Ezzel az a) feladatrészt megoldottuk.

.....

### **b1) A csonkolt kocka felszínének meghatározása**

Ismét a 3. ábra alapján:

$$A = 3 \cdot a^2 + 3 \cdot \left( a^2 - \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot a^2 \right) + T_{\Delta} = 6 \cdot a^2 - \frac{3}{2} \cdot \lambda^2 \cdot a^2 + T_{\Delta}; \quad (7)$$

továbbá *Héron* képletével:

$$T_{\Delta} = \sqrt{s \cdot (s - a^*) \cdot (s - b^*) \cdot (s - c^*)} , \quad (8 / 1)$$

$$a^* = b^* = c^* = \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a , \quad (8 / 2)$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a . \quad (8 / 3)$$

A ( 8 ) képletekkel:

$$\begin{aligned} T_{\Delta} &= \sqrt{s \cdot (s - a^*) \cdot (s - a^*) \cdot (s - a^*)} = (s - a^*) \cdot \sqrt{s \cdot (s - a^*)} = \\ &= \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a - \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a \right) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a - \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a \right)} = \\ &= \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a \cdot \left( \frac{3}{2} - 1 \right) \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a \cdot \left( \frac{3}{2} - 1 \right)} = \\ &= \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a \right)} = \\ &= \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a \right)^2} = \left( \sqrt{2} \cdot \lambda \cdot a \cdot \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \lambda^2 \cdot a^2 = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \lambda^2 \cdot a^2 , \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{T_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \lambda^2 \cdot a^2 .}} \quad (9)$$

Most ( 7 ) és ( 9 ) - cel:

$$\begin{aligned} A &= 6 \cdot a^2 - \frac{3}{2} \cdot \lambda^2 \cdot a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \lambda^2 \cdot a^2 = a^2 \cdot \left( 6 - \frac{3}{2} \cdot \lambda^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \lambda^2 \right) = \\ &= a^2 \cdot \left[ 6 - \lambda^2 \cdot \left( \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = a^2 \cdot \left[ 6 - \lambda^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \right] , \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{A(\lambda) = \left[ 6 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \lambda^2 \right] \cdot a^2 .}} \quad (10)$$

Ezzel az b1) feladatrészt megoldottuk.

.....

## **b2 ) A csonkolt kocka térfogatának meghatározása**

$$V = V_{kocka} - V_{g\acute{u}la} ; \quad (11 / 1)$$

$$V_{kocka} = a^3 ; \quad (11 / 2)$$

$$V_{g\acute{u}la} = T_{alap} \cdot \frac{m}{3} = \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot a^2 \cdot \frac{\lambda \cdot a}{3} = \frac{1}{6} \cdot \lambda^3 \cdot a^3 . \quad (11 / 3)$$

Most a ( 11 ) egyenletekből:

$$V = a^3 - \frac{1}{6} \cdot \lambda^3 \cdot a^3 = a^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \lambda^3\right), \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{V(\lambda) = \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \lambda^3\right) \cdot a^3}}. \quad (12)$$

Ezzel az b2) feladatrészt is megoldottuk.

.....

**c ) Az eredmények specializálása a  $\lambda = 0$  és  $\lambda = 1$  esetekre**

A metszősík egyenlete a  $\lambda = 0$  esetben, ( 6 ) - ből:

$$x + y + z = (3 - 0) \cdot a = 3 \cdot a, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{x + y + z = 3 \cdot a}}. \quad (13 / 1)$$

A metszősík egyenlete a  $\lambda = 1$  esetben, ( 6 ) - ből:

$$x + y + z = (3 - 1) \cdot a = 2 \cdot a, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{x + y + z = 2 \cdot a}}. \quad (13 / 2)$$

A csonkolt kocka felszíne a  $\lambda = 0$  esetben, ( 10 ) - ből:

$$A(0) = \left[6 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot 0\right] \cdot a^2 = 6 \cdot a^2, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{A(0) = 6 \cdot a^2}}. \quad (14 / 1)$$

A csonkolt kocka felszíne a  $\lambda = 1$  esetben, ( 10 ) - ből:

$$A(1) = \left[6 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot 1\right] \cdot a^2 = \left(6 - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot a^2 = \left(\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot a^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (9 + \sqrt{3}) \cdot a^2, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{A(1) = \frac{1}{2} \cdot (9 + \sqrt{3}) \cdot a^2}}. \quad (14 / 2)$$

A csonkolt kocka térfogata a  $\lambda = 0$  esetben, ( 12 ) - ből:

$$V(0) = \left(1 - \frac{1}{6} \cdot 0\right) \cdot a^3 = a^3, \text{ tehát:}$$

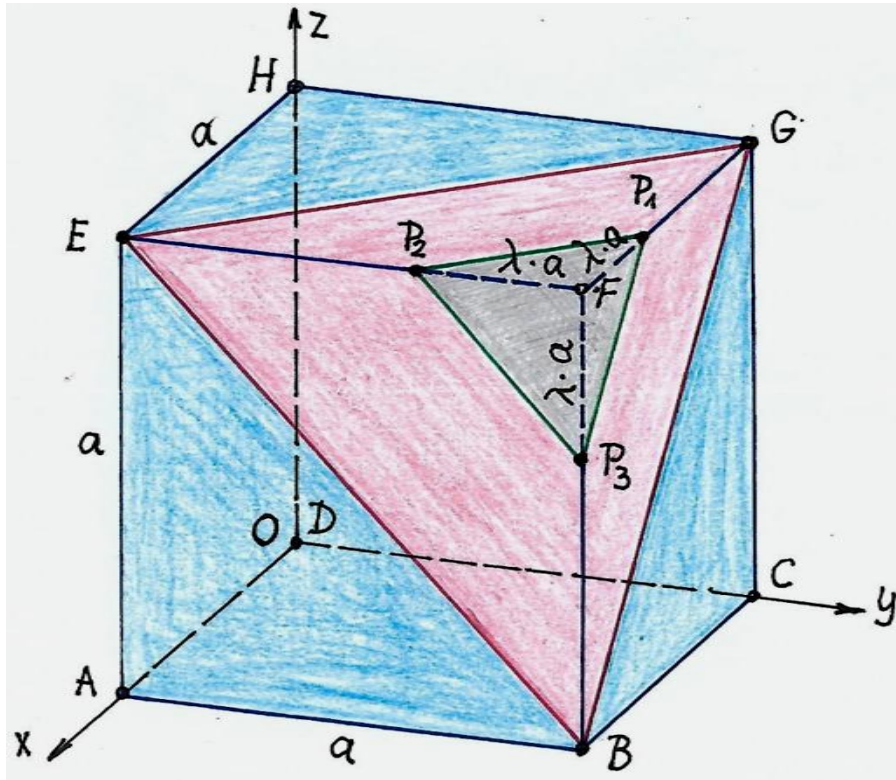
$$\underline{\underline{V(0) = a^3}}. \quad (15 / 1)$$

A csonkolt kocka térfogata a  $\lambda = 1$  esetben, ( 12 ) - ből:

$$V(1) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot a^3 = \frac{5}{6} \cdot a^3, \text{ tehát:}$$

$$\underline{\underline{V(1) = \frac{5}{6} \cdot a^3}}. \quad (15/2)$$

A (14/2) és (15/2) eredményeket szemlélteti a 4. ábra kék - lila színezése.



4. ábra

Ezzel a c) feladatrészt is megoldottuk.

.....

### Megjegyzések:

**M1.** Az 1. ábrán a kocka és a metszősík együtt lett ábrázolva, de a lemetszett rész csak érzékeltetve van, mert a lemetszett részt nem tudjuk eltávolítani.

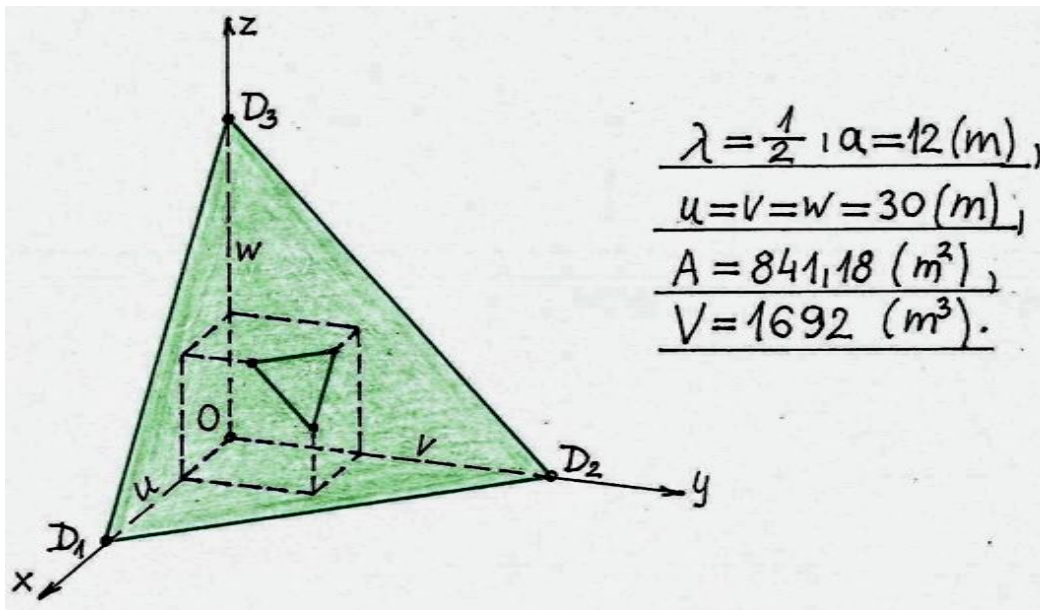
A 4. ábrán együtt szemléltetjük a

~  $\lambda = 0$  (ép kocka),

~  $0 < \lambda < 1$  (szürke metszősík, illetve metszeti felület), és a

~  $\lambda = 1$  (lila metszősík, illetve metszeti felület) eseteket.

**M2.** A (13) eredmények szerint a  $\lambda = 0$  esetben  $u = v = w = 3 \cdot a$ , a  $\lambda = 1$  esetben pedig  $u = v = w = 2 \cdot a$ . Egy konkrét számpélda eredményei láthatók az 5. ábrán.



5. ábra

Javasolt utánaszámolni!

**M3.** Az 1. ábrán a „kocka” valójában egy  $R$  sugarú szupergömb, melynek centruma a  $C(R, R, R)$  pontban van, és melynek egyenlete így:

$$\left(\frac{x}{R} - 1\right)^{2 \cdot n} + \left(\frac{y}{R} - 1\right)^{2 \cdot n} + \left(\frac{z}{R} - 1\right)^{2 \cdot n} = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{M1})$$

A metszősík egyenlete (6) - tal és  $a = 2 \cdot R$  - rel:

$$x + y + z = (3 - \lambda) \cdot 2 \cdot R, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (\text{M2})$$

Az 1. ábra adatai:

$$R = 6 \text{ (m)}, \quad n = 150, \quad \lambda = \frac{1}{2}. \quad (\text{A})$$

**M4.** Javasoljuk, hogy az Olvasó végezze el (4) és (5) - tel az ellenőrzést!

**M5.** Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó folytassa a feladatot

~ 2, 3, ..., 8 csúcs csonkolása esetére;

~  $\lambda \equiv \lambda_{x,y,z}$  helyett  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ , stb. alkalmazásával;

~  $a$  hosszúságú kockaél helyett  $a, b, c$  téglatest - élhosszakkal, stb.!

(A fenti levezetés ehhez szükséges módosításai viszonylag könnyen felismerhetők és megvalósíthatók.)

**M6.** Feltehető a kérdés:

Mekkora a csonkolósíknak az  $O = D$  kockacsúcstól mért  $d$  távolsága?

A választ a több korábbi dolgozatunkban\*) is szereplő / levezetett képlettel adjuk meg:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2} ; \quad (\text{M3})$$

most ( M3 ) és ( 5 ) - tel is:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} = 3 \cdot \frac{1}{u^2} = 3 \cdot \frac{1}{(3-\lambda)^2 \cdot a^2} \rightarrow d^2 = \frac{(3-\lambda)^2 \cdot a^2}{3} \rightarrow d = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (3-\lambda) \cdot a ,$$

tehát:

$$\underline{d = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (3-\lambda) \cdot a = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot u} . \quad (\text{M4})$$

Például  $\lambda = \frac{1}{2}$  esetén:

$$d \left( \lambda = \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left( 3 - \frac{1}{2} \right) \cdot a = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{2} \cdot a , \text{ azaz:}$$

$$\underline{d \left( \lambda = \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{2} \cdot a = 1,443 \cdot a} . \quad (\text{a1})$$

Az ( a1 ) eredmény az 5. ábra esete, melynél számszerűen:

$$\underline{\underline{d \left( \lambda = \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5}{2} \cdot 12 \text{ m} = 17,321 \text{ m}}} . \quad (\text{a2})$$

Könnyű észrevenni, hogy az 1. és az 5. ábra egymás megfelelői.

**M7.** Érdemes megfigyelni az 5. ábra két metszősíkbeli háromszögének kölcsönös helyzetét!

**M8.** Végül egy önállóan megoldandó többlet - feladat az érdeklődő Olvasónak.

Igazoljuk, hogy az 5. ábra két metszősíkbeli háromszöge területének  $\tau$  arányára fennáll, hogy:

$$\tau \equiv \frac{T_{D_1 D_2 D_3}}{T_A} = \left( \frac{3}{\lambda} - 1 \right)^2 ! \quad (\text{M5})$$

*Ajánlott olvasmány:*

\*)  
<https://galgoczi.net/anyagok/A%20betamasztott%20lemez%20egy%20ujabb%20geometriai%20feladata.pdf>

**Források:**

[ 1 ] – <https://c3d.libretexts.org/CalcPlot3D/index.html>

[ 2 ] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev**: Matematikai zsebkönyv  
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: **Galgóczy Gyula**  
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2022. 04. 25.

Továbbiak: <https://galgoczy.net/>